

樂思初中 數學新課程練習 (第 3 冊)

4. 指數定律

姓名：_____ 班別：_____



數學名人堂

艾碩·牛頓爵士 (Sir Isaac Newton FRS, 1642 年 12 月 25 日 – 1727 年 3 月 20 日) 是一位著名的物理學家和數學家。他對數學領域作出了重大貢獻，包括他提出的二項式定理的通式。通過在二項式定理中引入負指數，牛頓將其適用範圍擴展到更廣泛的數學運算式上。牛頓對一般二項式定理的研究和負指數的使用，為微積分的發展和無窮級數的研究奠定了基礎。



艾碩·牛頓爵士



知識重溫

1. 整數指數定律 (laws of integral indices)

若 $a, b \neq 0$ 及 m 和 n 是任意整數，則

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(b) $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $(ab)^m = a^m b^m$

(e) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(f) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ← 亦可得 $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$ 及 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$ 。

(g) $a^0 = 1$

2. 科學記數法 (scientific notation)

我們可利用科學記數法，把非常大或非常接近 0 的數表示成 $\pm a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ 及 n 為整數。

例如：

(a) $245000 = 2.45 \times 10^5$ ◀ 把小數點向左移 5 個位

(b) $-0.00617 = -6.17 \times 10^{-3}$ ◀ 把小數點向右移 3 個位

備註：若把某近似值以科學記數法表示成 $a \times 10^n$ ，則該近似值的有效數字的數目與 a 的有效數字數目相同。

3. 不同進制的記數法 (different numeral systems)**(a) 十進制記數法 (denary system)**

在十進制記數法中，採用的數碼為 0, 1, 2, ..., 9。十進數的位值 (place value) 包括 1 ($= 10^0$), 10^1 , 10^2 , 10^3 , ...

例如： $58\,072_{10} = 5 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 7 \times 10 + 2 \times 1$

數字	5	8	0	7	2
位值	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

(b) 二進制記數法 (binary system)

在二進制記數法中，採用的數碼為 0 和 1。二進數的位值包括 1 ($= 2^0$), 2^1 , 2^2 , 2^3 , ...

例如： $101011_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1$

數字	1	0	1	0	1	1
位值	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

(c) 十進數與二進數之間的互換

(i) 把一個二進數轉換成十進數：利用展開式。

例如，把 1000101_2 轉換成十進數。

$$\begin{aligned}
 1000101_2 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 64 + 4 + 1 \\
 &= 69_{10}
 \end{aligned}$$

(ii) 把一個十進數轉換成二進數：利用短除法。

例如，把 25_{10} 轉換成二進數。

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 25 \\
 \hline
 2 & 12 \quad \cdots \quad 1 \\
 \hline
 2 & 6 \quad \cdots \quad 0 \\
 \hline
 2 & 3 \quad \cdots \quad 0 \\
 \hline
 & 1 \quad \cdots \quad 1
 \end{array}$$

$$\therefore 25_{10} = 11001_2$$



概念檢測

判斷下列各項是否正確。

1. $2a^0 = 1$

2. $(a^4)^4 = a^{16}$

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

4. $0.003\,42 = 3.42 \times 10^3$

非基礎 5. $1010_2 = 1010_{10}$

分步例題

例題 1

以科學記數法表示下列各數，並把答案捨入至三位有效數字。

(a) 2 398 000

(b) 0.000 521 4

解

(a) $2\,398\,000 = 2.398 \times 10^6$

(b) $0.000\,521\,4 = 5.214 \times 10^{-4}$

$= \underline{2.40} \times 10^6$

$= \underline{5.21} \times 10^{-4}$

(準確至三位有效數字)

(準確至三位有效數字)

即時練習 1

以科學記數法表示下列各數，並把答案捨入至三位有效數字。

(a) 302 385

(b) 0.004 035 41

解

$$(a) \quad 302\,385 = (\quad) \times 10^{(\quad)}$$

$$=$$

(準確至三位有效數字)

$$(b) \quad 0.004\,035\,41 = (\quad) \times 10^{(\quad)}$$

$$=$$

(準確至三位有效數字)

例題 2

化簡下列各數式，並以正指數表示答案。

(a) $\left(\frac{-a^4}{a^9}\right)^3$

(b) $\left(\frac{2a^3}{a^6b^5}\right)^2$

解

$$(a) \quad \left(\frac{-a^4}{a^9}\right)^3 = \left(\frac{-1}{a^{9-4}}\right)^3$$

$$= \left(\frac{-1}{a^5}\right)^3$$

$$= \frac{(-1)^3}{(a^5)^3}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{a^{15}}}}$$

$$(b) \quad \left(\frac{2a^3}{a^6b^5}\right)^2 = \left(\frac{2}{a^{6-3}b^5}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{a^3b^5}\right)^2$$

$$= \frac{2^2}{(a^3)^2(b^5)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{a^6b^{10}}}}$$

即時練習 2

化簡下列各數式，並以正指數表示答案。

(a) $\left(\frac{-3}{a^7}\right)^4$

(b) $\left(\frac{b^7}{3a^2b^3}\right)^2$

解

$$(a) \quad \left(\frac{-3}{a^7}\right)^4 = \frac{(\quad)^4}{(\quad)^4}$$

$$= \frac{(\quad)}{a^{(\quad) \times (\quad)}}$$

$$= \frac{(\quad)}{a^{(\quad)}}$$

$$(b) \quad \left(\frac{b^7}{3a^2b^3}\right)^2 = \left(\frac{b^{(\quad) - (\quad)}}{3a^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\quad}{3a^2}\right)^2$$

$$= \frac{(\quad)^2}{3^2(\quad)^2}$$

$$= \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

非基礎

例題 3把 35_{10} 轉換成二進數。

解

2	35		
2	17	...	1
2	8	...	1
2	4	...	0
2	2	...	0
	1	...	0

$$\therefore 35_{10} = \underline{\underline{100011_2}}$$

非基礎

即時練習 3把 29_{10} 轉換成二進數。

解

2	29		
2		...	()
2		...	()
2		...	0
		...	1

$$\therefore 29_{10} =$$

非基礎

例題 4把 1110_2 轉換成十進數。

解

$$\begin{aligned}
 1110_2 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \quad \blacktriangleleft \text{把二進數寫成展開式。} \\
 &= 8 + 4 + 2 \\
 &= \underline{\underline{14_{10}}}
 \end{aligned}$$

非基礎

即時練習 4把 10101_2 轉換成十進數。

解

$$\begin{aligned}
 10101_2 &= 1 \times (\quad) + 0 \times (\quad) + 1 \times (\quad) + 0 \times (\quad) + 1 \times (\quad) \\
 &= (\quad) + (\quad) + (\quad) \\
 &=
 \end{aligned}$$



練習

程度 0

4.1 整數指數定律

1. 不使用計算機，求下列各數式的值。

(a) 2024^0

(b) 9^{-2}

(c) $6^{-1} \times 6^0$

(d) $(25^0 \times 4)^3$

(e) $(5^{-9} \times 9^5)^0$

(f) $\left(\frac{5^3}{7^0}\right)^{-1}$

2. 化簡下列各數式，並以正指數表示答案。

(a) $a^{-2} \times a^6$

(b) $m^{-1}n^7 \times m^3n^{-3}$

(c) $\frac{p^{-9}}{p^{-4}}$

(d) $\frac{x^{-8}y^3}{x^2y^{-7}}$

(e) $(u^5)^{-7}$

(f) $(a^7b^{-4})^{-5}$

(g) $a^{-3}b^0 \times a^0b^{-4}$

(h) $\frac{x^7y^0}{x^0y^{-4}}$

4.2 科學記數法

3. 以科學記數法表示下列各數。

(a) 477 000 000

(b) 0.000 055 3

程度 1

4.1 整數指數定律

4. 化簡下列各數式，並以正指數表示答案。

(a) $\frac{a^9}{(a^7b^6)^2}$

(b) $\frac{c^7d^3}{(2c^8)^4}$

(c) $\frac{x^6y^2}{(xy^5)^3}$

(d) $\frac{(a^3b^4)^2}{(a^5b)^3}$

(e) $\left(\frac{a^2b^8}{-a}\right)^3$

(f) $\left(\frac{3x^2}{x^5y^3}\right)^{-2}$

4.2 科學記數法

5. 以科學記數法表示下列各數，並把答案捨入至三位有效數字。

(a) 3 937 520

(b) 0.000 902 599 3

6. 以整數或小數表示下列各數。

(a) 3.74×10^5

(b) 8.493×10^{-4}

4.3 不同進制的記數法

非基礎 7. 寫出下列各數中畫有底線的數字的位值。(以指數記數法表示答案。)

(a) 68 739₁₀

(b) 1101₂

非基礎 8. 把下列各十進數轉換成二進數。

(a) 37₁₀

(b) 58₁₀

(c) 113₁₀

(d) 122₁₀

非基礎 9. 把下列各二進數轉換成十進數。

(a) 11010_2

(b) 1011100_2

(c) 1110011_2

(d) 1010001_2

程度 2

10. 已知 n 為整數。化簡下列各數式。

(a) $\frac{81}{(3^{n+1})^4}$

(b) $9^{-n} \times (3^n)^3$

(c) $2^{3n} \times 8^{1-n}$

(d) $5^{n-1} \times 125^{3n+1}$

(e) $\frac{25^{-2-n} \times 25^{-2n}}{125^n}$

(f) $\frac{8^n \times 16^{n-4}}{4^{n-1}}$

11. 化簡下列各數式，並以正指數表示答案。

(a) $(-x)^3 \times (2x^{-3})^4 \times (x^{-1})^2$

(b) $(-xy^{-1})^4(x^{-2}y)^{-5}$

(c) $\left(\frac{4x^2}{y}\right)^{-2}\left(\frac{y^{-3}}{2x}\right)^3$

(d) $\left(\frac{x^{-4}}{3y^{-2}}\right)^{-2}\left(\frac{9y}{27x^{-1}}\right)^{-3}$

12. 求下列各數式的值，並以科學記數法表示答案。

(a) $(5.2 \times 10^{-3}) \times (6.5 \times 10^{12})$

(b) $5.3 \times 10^9 - 3.5 \times 10^8$

(c) $0.000\ 000\ 038\ 5 + 0.000\ 000\ 43$

(d) $\frac{(3.3 \times 10^{-4}) \times (4.1 \times 10^{12})}{3 \times 10^5}$

非基礎 13. 把下列各數式表示成十進數。

(a) $9 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 4 \times 10 + 3$

(b) $6 \times 10\ 000 + 1 \times 100 + 8 \times 10$

非基礎 14. 把下列各數式表示成二進數。

(a) $1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1$

(b) $2^5 + 2^4 - 1$

總複習

多項選擇題

1. $\frac{p^{-8}}{p^{-3}} =$

- A. p^5 。
B. p^{-5} 。
C. p^{11} 。
D. p^{-11} 。

☐

2. $9^{n+3} \times 2^{2n+6} =$

- A. 18^{n+3} 。
B. 18^{3n+9} 。
C. 36^{n+3} 。
D. 36^{3n+9} 。

☐

3. $\frac{125^{3n+1}}{625^{2n-3}} =$

- A. 5。
B. 5^{-n+7} 。
C. 5^{n+15} 。
D. 5^{17n-9} 。

☐

4. $\frac{3^{3n} \times 9^{4n}}{81^{2n}} =$

- A. 3。
B. 3^n 。
C. 3^{2n} 。
D. 3^{3n} 。

☐

5. 302 400 000 =

- A. 3.024×10^5 。
B. 3.024×10^6 。
C. 3.024×10^7 。
D. 3.024×10^8 。

☐

6. 下列哪個數的值最大？

- A. 4.9×10^5
B. 4.9×10^6
C. 9.4×10^{-5}
D. 9.4×10^{-6}

☐

7. $3.2 \times 10^{-6} - 6.3 \times 10^{-8} =$

- A. -3.1×10^2 。
B. -3.1×10^{-2} 。
C. 3.137×10^{-6} 。
D. 3.137×10^{-8} 。

☐

8. $-0.001\ 995 \times 10^{-8} =$

- A. -1.995×10^{-11}
(準確至三位有效數字)。
B. -2×10^{-11}
(準確至三位有效數字)。
C. -2.00×10^{-10}
(準確至三位有效數字)。
D. -2.00×10^{-11}
(準確至三位有效數字)。

☐

非基礎

9. $63_{10} =$

- A. 11101_2 。
B. 111101_2 。
C. 11111_2 。
D. 111111_2 。

☐

非基礎

10. $1000100000100100_2 =$

- A. $17 \times 2^{11} + 18$ 。
B. $17 \times 2^{11} + 36$ 。
C. $17 \times 2^{12} + 18$ 。
D. $17 \times 2^{12} + 36$ 。

☐

非基礎

11. $5 \times 2^8 + 2^7 - 3 \times 2^6 =$

- A. 10001100000_2 。
B. 10010000000_2 。
C. 10011000000_2 。
D. 10110000000_2 。

☐

提示



PL003X-04-011-1

結構式問題

1. 化簡下列各數式，並以正指數表示答案。

(a) $\frac{(m^3 n^{-4})^4}{m^{-6}}$

(b) $(a^2 b^5) \times (a^{-5} b^6)^4$

2. 以科學記數法表示 4 235 600 004，並把答案捨入至三位有效數字。

3. 求 $\frac{2.4 \times 10^{-4} \times 10\%}{1.8 \times 10^{-7}}$ 的值，並以科學記數法表示答案。（答案準確至三位數字。）

非基礎 4. 把 1011101_2 轉換成十進數。

非基礎 5. 把 107_{10} 轉換成二進數。