

樂思初中 數學新課程練習 (第 2 冊)

2. 恆等式及因式分解

姓名：_____ 班別：_____



數學名人堂

歐拉 (Euler, 1707 年 4 月 15 日 – 1783 年 9 月 18 日) 是著名的瑞士數學家、物理學家、天文學家、地理學家、邏輯學家和工程師。他開創了數學學術領域中圖論 (graph theory) 和拓撲學 (topology) 的研究。他亦在眾多數學學術分支中作出創新的發現，包括解析數論 (analytic number theory)、複分析 (complex analysis) 和微積分學 (infinitesimal calculus)。

以下公式稱為歐拉恆等式。

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

這公式以歐拉命名，是以下所列歐拉公式的一個特例（即當 $x = \pi$ ）：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

歐拉恆等式展示了數學中最基礎、且最重要的數字之間的微妙關係，因此被後世公認為展現數學之美的好例子。



歐拉



知識重溫

1. 恆等式的意義

(a) 定義

若未知數取任意數值，都能滿足一個方程，則該方程稱為**恆等式** (identity)。我們用恆等符號「 $\equiv$ 」來表示恆等式。

(b) 求恆等式中的未知常數

比較恆等式中左、右兩方的同類項的係數和常數項，便可求得恆等式中的未知常數。

例如：若 $Ax^2 - 3x + C \equiv 4x^2 + Bx - 7$ ，比較這恆等式中 x^2 項和 x 項的係數，以及比較常數項，我們可得 $A = 4$ 、 $B = -3$ 及 $C = -7$ 。

2. 一些重要的代數恆等式

(a) 平方差

$$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$$

(b) 完全平方

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

3. 簡單代數式的因式分解

(a) 因式分解 (factorization)

把代數式分解成若干個因式相乘的過程，稱為因式分解。

(b) 因式分解的方法

(i) 提取公因式

例如： $2ab + 4ac = 2a(b + 2c)$

(ii) 併項法

$$\begin{aligned} \text{例如：} \quad & 3a + 4b + 6ax + 8bx \\ &= (3a + 4b) + 2x(3a + 4b) \\ &= (3a + 4b)(1 + 2x) \end{aligned}$$

(iii) 利用恆等式

例如： $4a^2 - 9 = (2a + 3)(2a - 3)$

例如： $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$



概念檢測

判斷下列各項是否正確。

1. $a^2 + b^2 = (a + b)^2$ 是恆等式。

2. $(2x - 3)^2 = (3 - 2x)^2$ 是恆等式。

3. $9x^2 - 25y^2 = (9x + 25y)(9x - 25y)$

4. $y^2 - 1 = (y - 1)^2$ 是恆等式。

5. $4a^2 + b^2$ 不能進一步作因式分解。



分步例題

例題 1

證明 $2x + 4 = 2(x + 2)$ 是恆等式。

解

$$\text{右方} = 2(x + 2)$$

$$= 2x + 4$$

$$= \text{左方}$$

$$\therefore 2x + 4 \equiv 2(x + 2)$$

即時練習 1

證明 $3x - 6 = 3(x - 2)$ 是恆等式。

解

$$\text{右方} = 3(\quad)$$

$$= (\quad) - (\quad)$$

$$=$$

$\therefore$

例題 2

已知 $6(x + 3) \equiv Ax + B$ ，其中 A 和 B 都是常數。求 A 和 B 的值。

解

$$\text{左方} = 6(x + 3)$$

$$= 6x + 18$$

$$\therefore 6x + 18 \equiv Ax + B$$

比較同類項，可得：

$$A = \underline{6} \text{ 及 } B = \underline{18}。$$



練習

程度 0

5.1 率

1. 國豪駕車在 2 小時內行駛了 150 km。試以「km/h」為單位表示國豪的駕駛速率。

2. 200 個文件夾的售價是 \$50。試以「\$/個」為單位表示文件夾的售價率。

5.2 比

3. 化簡比 18 : 24。

4. 若 $a:b=2:7$ 及 $b:c=7:5$ ，求 $a:b:c$ 。

5. 若 $a:b=2:7$ 及 $b:c=8:3$ ，求 $a:b:c$ 。

總複習
多項選擇題

1. 若 $a:b=7:4$ 及 $b:c=4:7$, 則 $a:c=$

A. $1:1$ 。
 B. $1:1.75$ 。
 C. $1.75:1$ 。
 D. $7:4$ 。

☐

2. 若 $4x-9y=6x-12y$, 則 $x:y=$

A. $8:11$ 。
 B. $11:8$ 。
 C. $2:3$ 。
 D. $3:2$ 。

☐

3. 若一幅地圖上一條長 8 cm 的直路的實際長度是 2.4 km , 則該幅地圖的比例尺是

A. $1:0.3$ 。
 B. $1:30$ 。
 C. $1:30\,000$ 。
 D. $1:300\,000$ 。

☐

4. 已知 Y 與 X 成正比例。當 $Y=20$ 時, $X=8$ 。
 當 $Y=80$ 時, X 的值是

A. 2 。
 B. 32 。
 C. 120 。
 D. 200 。

☐

5. 已知 Y 與 X 成反比例。當 $Y=48$ 時, $X=12$ 。當 $X=72$ 時, Y 的值是

A. 8 。
 B. 12 。
 C. 18 。
 D. 288 。

☐

6. 某三角形內角的比是 $2:3:5$ 。該三角形最大的角的大小是

A. 40° 。
 B. 60° 。
 C. 90° 。
 D. 100° 。

☐

7. 若 $a:b=2:3$, 則 $(3a-b):(3a+2b)=$

A. $1:2$ 。
 B. $1:4$ 。
 C. $2:1$ 。
 D. $4:1$ 。

☐


8. 麪粉 A 和麪粉 B 的成本分別為 $\$12/\text{kg}$ 和 $\$20/\text{kg}$ 。若把 $x\text{ kg}$ 的麪粉 A 和 $y\text{ kg}$ 的麪粉 B 混合起來, 使得混合的麪粉的成本為 $\$18/\text{kg}$, 求 $x:y$ 。

A. $1:3$
 B. $1:4$
 C. $3:1$
 D. $4:1$

☐

提示



PL003W-05-014-1

